

Logarithme Néperien

Définition : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$ (ou *Log* et non *log*)

la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Conséquences :

- ❶ $\ln[u(x)]$: existe, $\underline{c}$ et $\underline{d}$ ssi $u(x) > 0$
- ❷ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- ❸ $(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- ❹ $\ln 1 = 0$
- ❺ $\ln[u(x)] = 0 \iff u(x) = 1$
- ❻ $\ln a = \ln b \iff a = b$
- ❼ $\ln a < \ln b \iff a < b$
- ❽ $\ln e = 1$ avec $e \approx 2,718 \dots$
- ❾ $\ln x = a \iff x = e^a$

Propriétés Algébriques:

- ❶ $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- ❷ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ❸ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ❹ $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Tableaux de signe :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	—	0	+

x	0	$e^{-\frac{b}{a}}$	$+\infty$
$a \ln x + b$	(-a)	0	(a)

Limites Remarquables :

❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	❷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$	❸ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0^+$
❹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	❺ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$	❻ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^m (\ln x)^n = 0$
❼ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1$	❽ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	❾ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$

Primitives :

- ❶ $\int \frac{1}{x} = \ln |x|$
- ❷ $\int \ln x = x \ln x - x$
- ❸ $\int \frac{u'(x)}{u(x)} = \ln |u(x)|$

Autres Bases de Logarithme : $\forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, on appelle fonction logarithme

de base a , notée $\log_a$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Exercice N° 01 : Déterminer les domaines des fonctions suivantes puis calculer la fonction dérivée :

- 1) $f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1)$
- 2) $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + 1)$
- 3) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1})$
- 4) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+3}\right)$
- 5) $f(x) = \ln(\sin 2x)$
- 6) $f(x) = \ln[\ln(2x - 4)]$
- 7) $f(x) = \ln|2x - 3|$
- 8) $f(x) = \ln^2 x + \ln x + 1$
- 9) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{\ln x - 3}$

Exercice N° 02 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

- 1) $\ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln 15$
- 2) $\ln(x^2 - 1) = \ln 3 + 4 \ln 2$
- 3) $\ln(\sqrt{2x}) = \ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$
- 4) $7 \ln^3 x - 9 \ln^2 x + 2 \ln x = 0$
- 5) $2 \ln x < \ln(3x - 2)$
- 6) $\frac{\ln x - 1}{3 - \ln x} \geq 1$

Exercice N° 03 : Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 (\ln x)^{17}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x}{x^5}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3x + \ln x)$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+5}{2x-1}\right)$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^3}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-5)}{x+3}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x-2)}{3x-1}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x+2}}{x^4 - 1}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x \ln x}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4 \ln x}{\ln x - 2}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1+2x}{x-5}\right)$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln^9 x)$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2 - 3x}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\ln x)^4$
- 21) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^2 - e^2}{\ln x - 1}$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2}$
- 23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - \ln^2)$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)}$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\ln(1 + 5x)}$
- 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4 \tan x)}{x^3}$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 8x + 5}{\ln x}$
- 28) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(1 - \ln(2x^2 - x))}{\ln x}$

Exercice N° 04 : Etudier le signe des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = 4 \ln x - 3$
- 2) $f(x) = -2 \ln x + 5$
- 3) $f(x) = 3 \ln(x + 1) + 2$
- 4) $f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x$

Exercice N° 05 : Déterminer, une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$
- 2) $f(x) = \frac{5x^2-3x+1}{x^2}$
- 3) $f(x) = \frac{2x-9}{x+4}$
- 4) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$
- 5) $f(x) = \frac{3}{x \ln x}$
- 6) $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-3}$
- 7) $f(x) = \frac{(\ln x)^5}{x}$
- 8) $f(x) = 2 \ln x - 1$

Exercice N° 06 : Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $I = \int_1^e x \cdot \ln x \cdot dx$
- 2) $I = \int_1^e \ln^2 x \cdot dx$
- 3) $I = \int_1^e (x-1) \ln^2 x \cdot dx$
- 4) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x - x^2) \cdot dx$
- 5) $I = \int_0^e (3x^2 - 2x) \ln x \cdot dx$
- 6) $I = \int_3^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$
- 7) $I = \int_a^b \frac{\sqrt{x^2+5}}{\cos^2 t} \cdot \ln x dt$
- 8) $I = \int_1^a \sin[\ln x] dx$
- 9) $I = \int_1^a (\ln t + t g x) dt$
- 10) $I = \int_1^e \sin[\ln(3x)] dx$
- 11) $I = \int_1^a \cos\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$
- 12) $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) dx$

Exercice N° 07 : Soit la suite I_p définie sur $\mathbb{N}$ par $I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$

- 1) a) Montrer que la suite I_p est décroissante.
b) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, I_{p+1} + \frac{p+1}{3} I_p = \frac{e^3}{3}$. Calculer I_2 .
- 2) a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \frac{e^3}{p+3}$.
b) Dédire que la suite I_p est une suite convergente.
- c) Etudier la convergence de la suite U_n définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

Exercice N° 08 : Etudier les variations des fonctions suivantes et les construire:

- 1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- 2) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$
- 3) $f(x) = \ln |x^2 - 1|$
- 4) $f(x) = \ln [\ln x]$
- 5) $f(x) = \ln [\sin(2x)]$
- 6) $f(x) = x^2 - 2\ln |x|$
- 7) $f(x) = \ln \left(\frac{x-2}{4-x} \right)$
- 8) $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$
- 9) $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
- 11) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
- 12) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}$

Exercice N° 09 :

- 1) a) Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{2e-x-x \ln x}{x}$. Calculer $g(e)$.
b) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x > 0$
- 2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = (2e - x) \ln x$. Etudier les variations de la fonction f
- 3) Déterminer les points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. Construire la courbe $\mathcal{C}$.
- 4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

Exercice N° 10 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe

- 1) Déterminer les domaines de la fonction f . Vérifier que f est impaire. Dédire le domaine d'étude.
- 2) Etudier les variations de f
- 3) a) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à T_0 .
b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé
- 4) Montrer que f réalise une bijection de D_f sur $\mathbb{R}$. Expliciter f^{-1} . Construire la courbe de f^{-1} .

Exercice N° 11 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Dresser le tableau des variations de la fonction f .
- 2) a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion Ω dont-on précisera les coordonnées.
b) Donner une équation de la tangente T_Ω en Ω .
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat. Tracer T_Ω et $\mathcal{C}$.
- 4) a) $\forall x > 0$ on pose $g(x) = f(x) - x$. Montrer que g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que la réciproque g^{-1} de g est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.
- 5) Soit $\alpha > 1$, Calculer en fonction de α , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = \alpha$. Déterminer α pour que $\mathcal{A}(\alpha) = 2$

Logarithme Népérien

2020-2021

Exercice N° 01:

① $f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1)$

$f \text{ existe} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{ssi } -2x^2 + x + 1 > 0$

$a+b+c=0 \Rightarrow x' = 1 \text{ et } x'' = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-2x^2 + x + 1$	-	0	+	-

$D_f = D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} =]-\frac{1}{2}, 1[$

$f'(x) = \frac{-4x+1}{-2x^2+x+1}$

② $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + 1)$

$f \text{ existe} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{ssi } x^3 - 2x^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 1) > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$x^2 - x - 1$	+	0	-	-	0
$x^3 - 2x^2 + 1$	-	0	+	0	+

$D_f =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[= D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 1}$

③ $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1})$

$D_f = D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} =]-1, -1[\cup]1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$

④ $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+3}\right)$

$D_f = D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} =]-3, 1[$

$f'(x) = \frac{\frac{-1}{(x+3)^2}}{\frac{1-x}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{(x+3)(1-x)}$

⑤ $f(x) = \ln(\sin 2x)$

$f \text{ existe} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{ssi } \sin(2x) > 0$

$\Rightarrow 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow D_f = D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = 2 \cotan(2x)$

⑥ $f(x) = \ln(\ln(2x-4))$

$f \text{ existe} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{ssi } \begin{cases} 2x-4 > 0 \\ \ln(2x-4) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2x-4 > 1 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} =]\frac{5}{2}, +\infty[$

$f'(x) = \frac{\frac{2}{2x-4}}{\ln(2x-4)} = \frac{1}{(x-2)\ln(2x-4)}$

⑦ $f(x) = \ln|2x-3|$

$f \text{ existe} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{ssi } 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow D_f = D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$f'(x) = \frac{2}{2x-3}$

⑧ $f(x) = \ln^2 x + \ln x + 1$

$D_f =]0, +\infty[, f'(x) = \frac{2}{x} \ln x + \frac{1}{x}$

⑨ $f(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x - 3}$ $D_f =]e, +\infty[\setminus \{e^3\}$

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(\ln x - 3) - \frac{1}{x}(1 - \ln x)}{(\ln x - 3)^2}$

$f'(x) = \frac{2}{x(\ln x - 3)^2}$

Exercice N° 02:

① $\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$

$D_E =]-3, +\infty[$

$(E) \Leftrightarrow \ln[(x+3)(x+5)] = \ln(15)$

$\Rightarrow (x+3)(x+5) = 15 \Rightarrow x^2 + 8x = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -8 \notin D_E \Rightarrow S_E = \{0\}$

② $\ln(x^2-1) = \ln(3) + 4\ln(2)$

$D_E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$(E): \ln(x^2-1) = \ln(3 \times 2^4) = \ln(48)$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 48 \Rightarrow x^2 = 49 \begin{cases} x=7 \\ x=-7 \end{cases} \\ \Rightarrow S_R = \{-7, 7\}$$

$$(3) \ln(\sqrt{2x}) = \ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow D_E =]0, 3[$$

$$(E) \Rightarrow \sqrt{2x} = \frac{3-x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \sqrt{2x(x+1)} = 3-x$$

$$\Rightarrow 2x(x+1) = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \begin{cases} x'=1 \\ x''=-9 \notin D_E \end{cases} \\ \Rightarrow S_R = \{1\}$$

$$(4) 7 \ln^3 x - 9 \ln^2 x + 2 \ln x = 0$$

$$\Rightarrow (\ln x)(7 \ln^2 x - 9 \ln x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 7 \ln^2 x - 9 \ln x + 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} \ln x = 1 \Rightarrow x = e \\ \ln x = \frac{2}{7} \Rightarrow x = e^{\frac{2}{7}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_R = \{1, e, e^{\frac{2}{7}}\}$$

$$(5) 2 \ln x < \ln(3x-2)$$

$$D_E =] \frac{2}{3}, +\infty[$$

$$I: \ln(x^2) < \ln(3x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 < 3x-2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow x'=1 \text{ et } x''=2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	-	+

$$S_R =] \frac{2}{3}, 1[\cup] 2, +\infty[$$

$$(6) \frac{\ln x - 1}{3 - \ln x} \geq 1 \Rightarrow \frac{\ln x - 1}{3 - \ln x} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x - 1 - 3 + \ln x}{3 - \ln x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 \ln x - 4}{3 - \ln x} \geq 0$$

on résoud m]0, +\infty[:

$$2 \ln x - 4 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

$$3 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

x	0	e^2	e^3	$+\infty$
$2 \ln x - 4$	-	+	+	+
$3 - \ln x$	+	+	-	-
Q	-	+	-	-

$$S_R = [e^2, e^3]$$

Exercice N° 03 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (x \ln x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 (\ln x)^{17} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^5} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x [\ln(x+1) - \ln x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln x = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{on pose } x = \frac{1}{X} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$$

$$\text{donc } x \rightarrow -\infty \Rightarrow X \rightarrow 0^-$$

$$l = \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+5}{2x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x(1+\frac{5}{x})}{x(2-\frac{1}{x})}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3} = 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-5)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-5)}{(x-5)} \cdot \frac{(x-5)}{x+3} = 0$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x-2)}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x-2)}{\sqrt{3x-1}}\right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{3x-1}} + \frac{\ln(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{3x-1}} \right] = 0$$

$$\textcircled{13} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x+2}}{x^4-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\ln(x+2)}{x^4(1-\frac{1}{x^4})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln x}{x^4(1-\frac{1}{x^4})} + \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{x^4-1} \right) = 0$$

$$\textcircled{14} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x \ln x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{\ln x}{x}} = +\infty$$

$$\textcircled{15} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+4 \ln x}{\ln x-2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x (4+\frac{1}{\ln x})}{\ln x (1-\frac{2}{\ln x})} = 4$$

$$\textcircled{16} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{1+2x}{x-5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}} \right) = \ln 2$$

$$\textcircled{17} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\textcircled{18} \lim_{t \rightarrow \infty} (x^2 - \ln x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{(\ln x)^4}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\textcircled{19} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{20} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\ln x)^4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{1}{2}}) (\ln x)^4 = 0$$

$$\textcircled{21} \lim_{x \rightarrow e} \frac{x^2-e^2}{\ln x-1} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x+e}{\frac{\ln x-1}{x-e}} = \frac{2e}{f'(e)} = 2e$$

$$\textcircled{22} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$\text{or } f'(x) = \frac{2x}{x^2-3} \Rightarrow f'(2) = 4 \Rightarrow \boxed{4}$$

$$\textcircled{23} \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln^2 x - 2 \ln x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln x)(\ln x - 2) = +\infty$$

$$\textcircled{24} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\left(\frac{\sin(x)}{x} \right) \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{25} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+5x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{5x} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(1+5x)}{5x}} = -\frac{1}{5}$$

$$\textcircled{26} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4 \tan x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4 \tan x)}{4 \tan x} \cdot \frac{4 \tan x}{x} = 4$$

$$\textcircled{27} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-8x+5}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x-5)}{\frac{\ln x}{x-1}} = -2$$

$$\textcircled{28} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-\ln(2x^2-x))}{\ln(2x^2-x)} \cdot \frac{\ln(2x^2-x)}{\ln(2x^2-x)} \cdot \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-\ln(2x^2-x))}{\ln(2x^2-x)} \cdot \frac{\ln(2x^2-x)}{x-1} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}} = -1$$

$f'(1) = 1$

Exercise N° 04 :

$$1) f(x) = 4 \ln x - 3 \quad D_f =]0, +\infty[$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{4}}$$

x	0	$e^{\frac{3}{4}}$	$+\infty$
$4 \ln x - 3$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$2) f(x) = -2 \ln x + 5 \quad D_f =]0, +\infty[$$

x	0	$e^{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$-2 \ln x + 5$	$+\infty$	0	$-\infty$

$$3) f(x) = 3 \ln(x+1) + 2 \quad D_f =]-1, +\infty[$$

x	-1	$-1 + e^{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
$3 \ln(x+1) + 2$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$4) f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x = \ln x (\ln x - 2)$$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\ln x - 2$	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	0	$+\infty$

Exercise N° 05 :

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2} \frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+2) + k = \ln(\sqrt{x^2-2x+2}) + k$$

$$2) f(x) = \frac{5x^2-3x+1}{x^2} = 5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$F(x) = 5x - 3 \ln|x| - \frac{1}{x} + k$$

$$3) f(x) = \frac{2x-9}{x+4} = \frac{2(x+4)-17}{x+4} = \frac{2}{x+4} - \frac{17}{x+4}$$

$$\Rightarrow F(x) = 2x - 17 \ln|x+4| + k$$

$$4) f(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1| + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + k$$

$$5) f(x) = \frac{3}{x \ln x} = 3 \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \right)$$

$$\Rightarrow F(x) = 3 \ln |\ln x| + k$$

$$6) f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3} = 3x + 7 + \frac{20}{x - 3}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x + 20 \ln |x - 3| + k$$

$$7) f(x) = \frac{(\ln x)^5}{x} = \frac{1}{x} (\ln x)^5$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (\ln x)^6 + k$$

$$8) f(x) = 2 \ln x - 1 \quad D_{\text{f}} =]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow F(x) = 2(x \ln x - x) - x + k$$

$$\Rightarrow F(x) = 2x \ln x - 3x + k$$

Exercice N° 06:

$$① I = \int_1^e x \cdot \ln x \, dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = \ln x \longrightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \boxed{I = \frac{e^2 + 1}{4}}$$

$$② I = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = (\ln x)^2 \longrightarrow u' = 2 \left(\frac{1}{x} \right) \ln x \\ v' = 1 \longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx$$

$$= \left[x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^e$$

$$= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$$

$$③ I = \int_1^e (x-1)(\ln x)^2 \, dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = (\ln x)^2 \longrightarrow u' = \frac{2}{x} \ln x \\ v' = x-1 \longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e (x-2) \ln x \, dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = \ln x \longrightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = x-1 \longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) dx$$

$$\Rightarrow J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + x \right]_1^e$$

$$\Rightarrow I = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) (\ln x)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x + \frac{1}{4}x^2 - x \right]_1^e$$

$$④ I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x - x^2) \, dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = \ln(2x - x^2) \longrightarrow u' = \frac{2 - 2x}{2x - x^2} \\ v' = 1 \longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[x \cdot \ln(2x - x^2) \right]_{\frac{1}{2}}^1 - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{2-x} \, dx$$

$$\Rightarrow I = \left[x \cdot \ln(2x - x^2) \right]_{\frac{1}{2}}^1 - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 1 + \frac{1}{x-2} \, dx$$

$$= \left[x \ln(2x - x^2) - 2x - 2 \ln |x-2| \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$⑤ I = \int_0^e (3x^2 - 2x) \ln(x+1) \, dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = \ln(x+1) \longrightarrow u' = \frac{1}{x+1} \\ v' = 3x^2 - 2x \longrightarrow v = x^3 - x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[(x^3 - x^2) \ln(x+1) \right]_0^e - \int_0^e \frac{x^3 - x^2}{x+1} \, dx$$

$$I = \left[(x^3 - x^2) \ln(x+1) \right]_0^e - \int_0^e \left(x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[(x^3 - x^2) \ln(x+1) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 2 \ln |x+1| \right]_0^e$$

$$⑥ I = \int_3^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = 2 \int_3^2 \frac{\frac{1}{x}}{2 \sqrt{\ln x}} = \left[2 \sqrt{\ln x} \right]_3^2$$

$$⑦ I = \int_a^b \frac{\sqrt{x^2+5}}{x \cos t} \ln x \, dt = \sqrt{x^2+5} \cdot \ln x \int_a^b \frac{dt}{\cos t}$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{x^2+5} \cdot \ln x \left[\tan t \right]_a^b$$

$$⑧ I = \int_1^9 \sin(\ln x) \, dx = \int_1^9 x \left(\frac{1}{x} \sin(\ln x) \right) dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = x \longrightarrow u' = 1 \\ v' = \frac{1}{x} \sin(\ln x) \longrightarrow v = -\cos(\ln x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[-x \cos(\ln x) \right]_1^9 + \int_1^9 \left(\frac{1}{x} \cos(\ln x) \right) dx$$

on pose $u = x \longrightarrow u' = 1$
 $v' = \frac{1}{x} \cos(\ln x) \longrightarrow v = \sin(\ln x)$

$$\Rightarrow J = \left[x \sin(\ln x) \right]_1^a - \int_1^a \sin(\ln x) dx$$

$$\Rightarrow J = \left[x \sin(\ln x) \right]_1^a - I$$

dériv $I = \left[-x \cos(\ln x) \right]_1^a + \left[x \sin(\ln x) \right]_1^a - I$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) \right]_1^a = \dots$$

(9) $I = \int_1^a (\ln t + \tan x) dt = \left[t \ln t - t + t \ln x \right]_1^a$

$$I = a \ln a + a(\ln x - 1) + 1 - \tan x$$

(10) $I = \int_1^e \sin(\ln 3x) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{3}x \right) \left(\frac{3}{x} \right) \sin(\ln 3x) dx$

on pose $u = \frac{1}{3}x \longrightarrow u' = \frac{1}{3}$
 $v' = \frac{3}{x} \sin(\ln 3x) \longrightarrow v = -\cos(\ln 3x)$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{3}x \cos(\ln 3x) \right]_1^a + \frac{1}{3} \int_1^a \frac{1}{x} \cos(\ln 3x) dx$$

on pose $u = \frac{1}{3}x \longrightarrow u' = \frac{1}{3}$
 $v' = \frac{3}{x} \cos(\ln 3x) \longrightarrow v = \sin(\ln 3x)$

$$\Rightarrow J = \left[\frac{x}{3} \sin(\ln 3x) \right]_1^a - \frac{1}{3} \int_1^a \sin(\ln 3x) dx$$

also $I = \left[-\frac{1}{3}x \cos(\ln 3x) + \frac{x}{9} \sin(\ln 3x) \right]_1^a - \frac{1}{9} I$

$$\Rightarrow \frac{10}{9} I = \left[-\frac{1}{3}x \cos(\ln 3x) + \frac{x}{9} \sin(\ln 3x) \right]_1^a$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{10} \left[-3x \cos(\ln 3x) + x \sin(\ln 3x) \right]_1^a$$

(11) $I = \int_1^a \cos\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_1^a \cos(-\ln x) dx$

on pose $u = -x \longrightarrow u' = -1$
 $v' = -\frac{1}{x} \cos(-\ln x) \longrightarrow v = \sin(-\ln x)$

$$\Rightarrow I = \left[-x \sin(-\ln x) \right]_1^a + \int_1^a \sin(-\ln x) dx$$

on pose $u = -x \longrightarrow u' = -1$
 $v' = -\frac{1}{x} \sin(-\ln x) \longrightarrow v = -\cos(-\ln x)$

$$\Rightarrow J = \left[x \cos(-\ln x) \right]_1^a - \int_1^a \cos(-\ln x) dx$$

dériv $I = \left[-x \sin(-\ln x) + x \cos(-\ln x) \right]_1^a - I$

$$\Rightarrow 2I = \left[-x \sin(-\ln x) + x \cos(-\ln x) \right]_1^a$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{2}x \sin(-\ln x) + \frac{1}{2}x \cos(-\ln x) \right]_1^a$$

(12) $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) dx$

on pose $u = \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \longrightarrow u' = \frac{2}{x(1-x^2)}$
 $v' = 1 \longrightarrow v = x$

$$\Rightarrow I = \left[x \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{1-x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[x \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[x \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) + \ln(1-x) - \ln(1+x) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \left[x \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dots$$

Exercice N° 07:

$$I_P = \int_1^e x^2 (\ln x)^P dx$$

1) a) $I_{P+1} - I_P = \int_1^e x^2 (\ln x)^P (\ln x - 1) dx$

or $1 \leq x \leq e \Rightarrow x^2 > 0$
 $0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow (\ln x)^P \geq 0$
 $-1 \leq \ln x - 1 \leq 0 \Rightarrow \ln x - 1 \leq 0$

$$\Rightarrow x^2 (\ln x)^P (\ln x - 1) \leq 0$$

Comme $1 < e \Rightarrow \int_1^e x^2 (\ln x)^P (\ln x - 1) dx \leq 0$

donc $\boxed{I_P \geq 0}$

b) $I_{P+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{P+1} dx$

on pose $u = (\ln x)^{P+1} \longrightarrow u' = \frac{P+1}{x} (\ln x)^P$
 $v' = x^2 \longrightarrow v = \frac{1}{3} x^3$

$$\Rightarrow I_{p+1} = \left[\frac{1}{3} x^3 (\ln x)^{p+1} \right]_1^e - \underbrace{\frac{(p+1)}{3} \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx}_{I_p}$$

$$\Rightarrow I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - (p+1) I_p$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{p+1} + \frac{(p+1)}{3} I_p = \frac{e^3}{3}}$$

Pour $p=1 \Rightarrow I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} I_1$

$$I_1 = \int_1^e x^2 (\ln x) dx$$

on pose $u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$
 $v' = x^2 \rightarrow v = \frac{1}{3} x^3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^e = \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} \right) - \left(-\frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2e^3 + 1}{9} \right) \Rightarrow I_2 = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

2) a) On $\frac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \frac{e^3}{p+3}$?

on: $I_p \downarrow \Rightarrow I_{p+1} \leq I_p$

$$\Rightarrow \frac{e^3}{3} - \frac{(p+1)}{3} I_p \leq I_p$$

$$\Rightarrow \frac{e^3}{3} \leq \frac{(p+4)}{3} I_p \Rightarrow \boxed{\frac{e^3}{p+4} \leq I_p} \quad (1)$$

$I_p \leq I_{p-1} \Rightarrow$ on $I_p \leq \frac{p}{3} I_{p-1} = \frac{e^3}{3}$
 $\Rightarrow I_{p-1} \leq \frac{3}{p} I_p + \frac{e^3}{p}$

$$\Rightarrow I_p \leq \frac{3}{p} I_p + \frac{e^3}{p} \Rightarrow I_p \left(\frac{p+3}{p} \right) \leq \frac{e^3}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_p \leq \frac{e^3}{p+3}} \quad (2)$$

(1) et (2) $\rightarrow \boxed{\frac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \frac{e^3}{p+3}}$

b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{e^3}{p+4} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{e^3}{p+3} = 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} I_p = 0$
donc I_p converge vers 0

c) $U_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx = n I_n$

$$a \quad \frac{ne^3}{n+4} \leq n I_n \leq \frac{ne^3}{n+3}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^3}{n+4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^3}{n} = e^3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^3}{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^3}{n} = e^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e^3}$$

Exercice N° 08 :

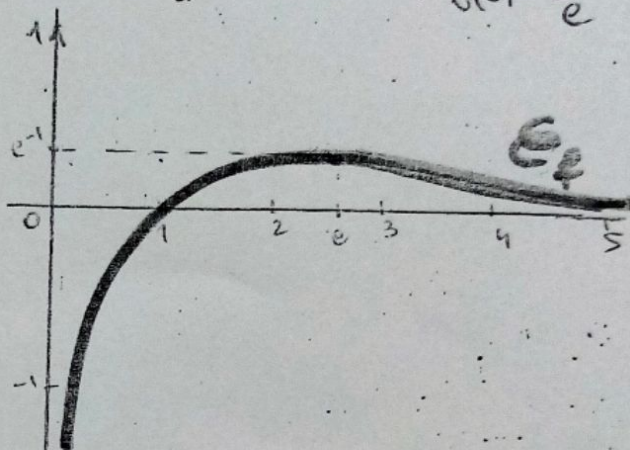
1) $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad D_f =]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

on résout $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 $f(e) = \frac{1}{e}$

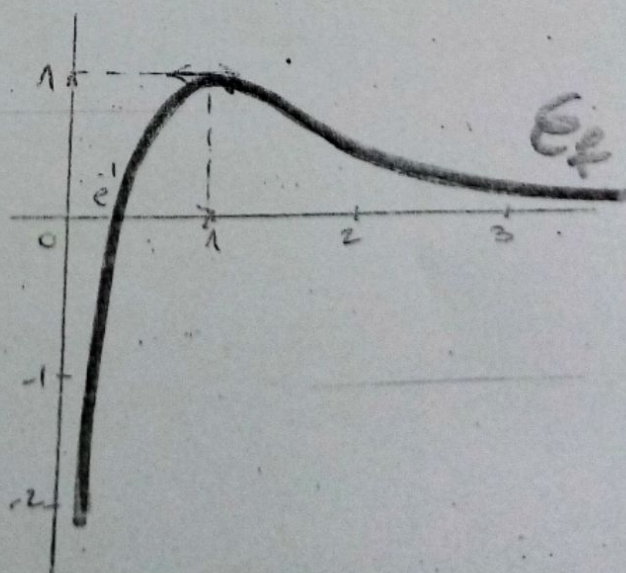


2) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \quad D_f =]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

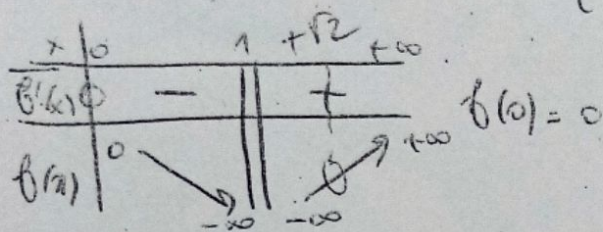
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 $f(1) = 1$



3) $f(x) = \ln|x^2-1|$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 f' pair $\Rightarrow D =]0, +\infty[\cup]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$



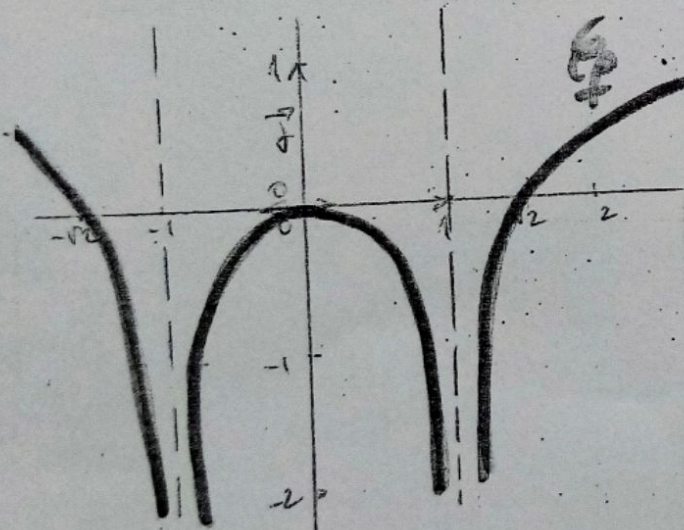
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln|x^2-1| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x^2-1| = +\infty \text{ (B.I.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2(1-\frac{1}{x^2}))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + \ln(1-\frac{1}{x^2})}{x} = 0$$

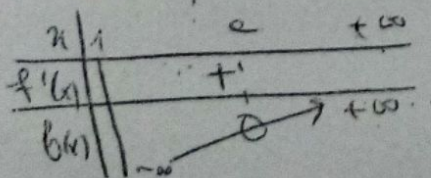
$\Rightarrow$ Cf admet une branche inférieure au voisinage de $(+\infty)$ de $d'inf(0, \infty)$

on résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^2-1| = 1$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=1 \\ x^2-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=0 \end{cases}$



4) $f(x) = \ln(\ln x)$ $D_f =]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} > 0$$



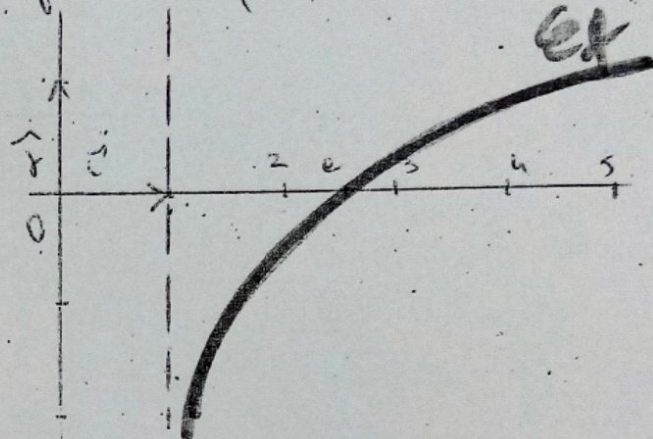
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = +\infty \text{ (B.I.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ Cf admet une B.I. en $(+\infty)$ de $d'inf(0, \infty)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$



5) $f(x) = \ln(\sin 2x)$

$$f \text{ existe } \Leftrightarrow \sin 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow D_f = D_g = D_h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

f périodique de période π

$$\Rightarrow D_e =]0, \frac{\pi}{2}[$$

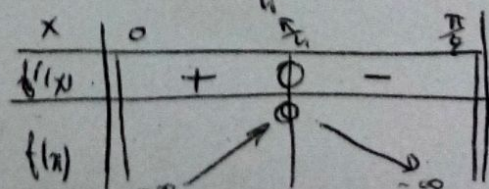
Il suffit d'étudier la restriction de f au domaine d'étude $D_e =]0, \frac{\pi}{2}[$ et de construire l'arc $\mathcal{C}$ correspondant

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \text{ (C)}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = 2 \cot(2x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

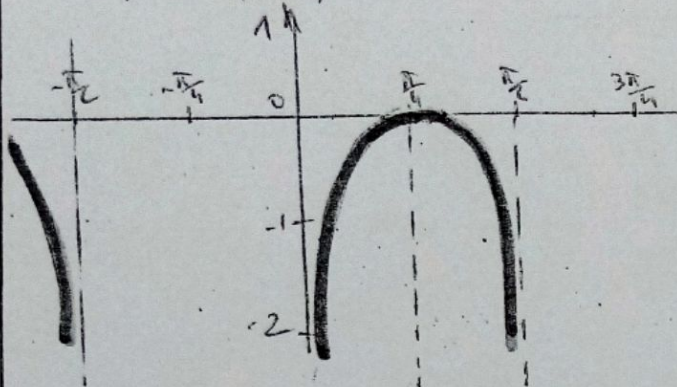
$$\text{sur } D_e: x = \frac{\pi}{4}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin 2x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\sin 2x) = -\infty$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = \ln 1 = 0$$

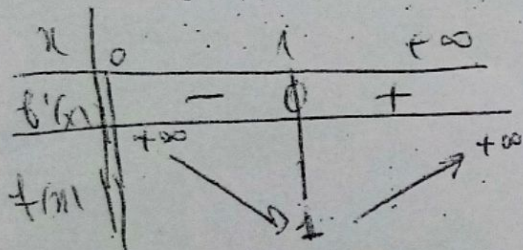


$$6) f(x) = x^2 - 2 \ln|x| \quad D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow D_f =]0, +\infty[\cup]-\infty, 0[$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

$$\text{on résout } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$



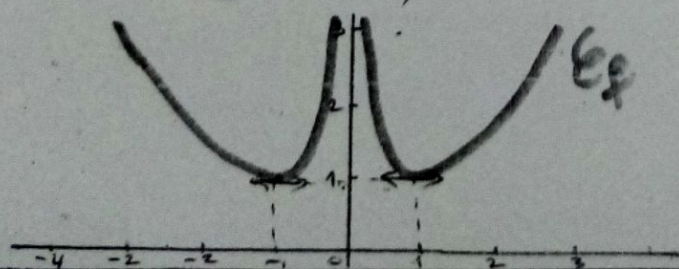
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) = +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty \quad (BI)$$

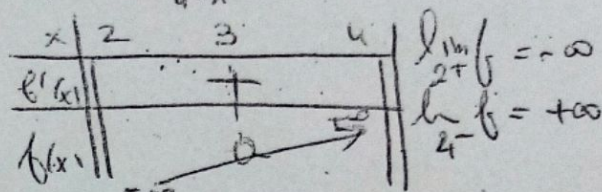
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une BI au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(\vec{OF})$

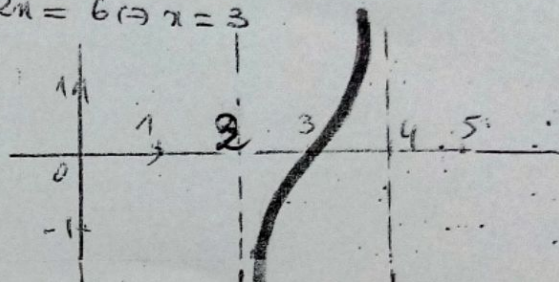


$$7) f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right) \quad D_f =]2, 4[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{(4-x)^2}}{\frac{x-2}{4-x}} = \frac{2}{(4-x)(x-2)} < 0$$



$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{4-x} = 1 \Rightarrow x-2 = 4-x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$



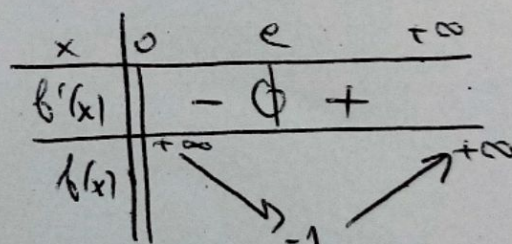
$$3) f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x \quad D_f =]0, +\infty[$$

$$f \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln]0, +\infty[$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) \ln x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} (\ln x - 1)$$

$$\text{on résout } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x - 2 \ln x = +\infty$$

$$\Rightarrow x=0 \quad A.V$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - 2 \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(\vec{OF})$

$$\mathcal{C}_f \cap (n^1 x) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_f \cap (x'x) = \{A(1,0) B(e^2, 0)\}$$

Point d'inflexion: $f' \in]0, +\infty[$

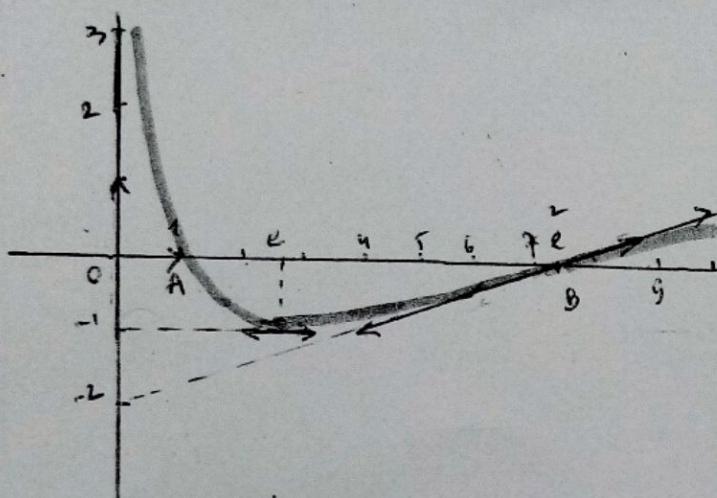
$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{4 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

$\Rightarrow B(e^2, 0)$: point d'inflexion

$$T_B: y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$$

$$\text{or } f'(e^2) = \frac{2}{e^2} \Rightarrow y = \left(\frac{2}{e^2}\right)x^2 - 2$$



$$\textcircled{9} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} & \text{si } x > 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$D_f = [0, e[\cup]e, +\infty[$$

• Comportement en 0^+ :

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{\ln x (1 - \frac{2}{\ln x})}{\ln x (1 - \frac{1}{\ln x})} = 1 = f(1)$$

$$\Rightarrow f \leq \text{en } 0^+$$

• Dérivabilité de f en 0^+ :

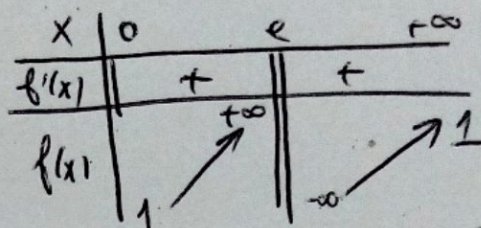
$$\lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{\frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{\ln x - 2 - \ln x + 1}{x(\ln x - 1)} = \lim_{0^+} \frac{-1}{x(\ln x - 1)}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\leq$ en 0^+ et $\mathcal{C}_f$ admet en 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

$$\forall x > 0, x \neq e \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x - 2)}{(\ln x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)^2} > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x (1 - \frac{2}{\ln x})}{\ln x (1 - \frac{1}{\ln x})} = 1$$

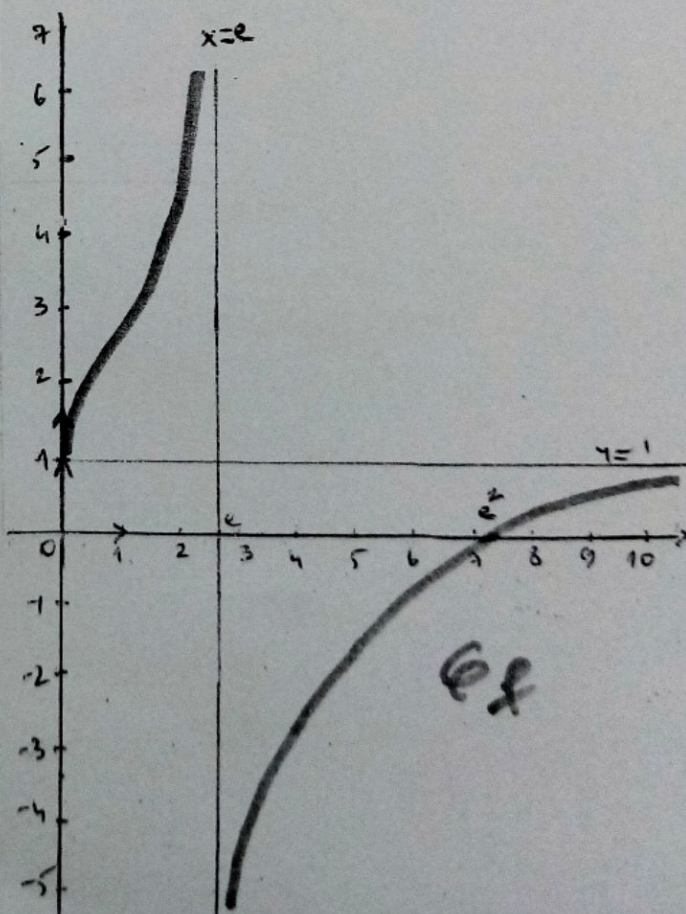
$\Rightarrow D: y = 1$ Asymptote horizontale en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = -\infty$$

$D: x = e$: Asymptote verticale

$$\mathcal{C}_f \cap (x'x) = \{f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2\}$$



⑩ $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

en 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 = f(0)$
 $\Rightarrow f$ est en 0

en 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x} = 0$
 $\Rightarrow f$ dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

$f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \left(\frac{1}{x}\right) = x(2 \ln x + 1)$

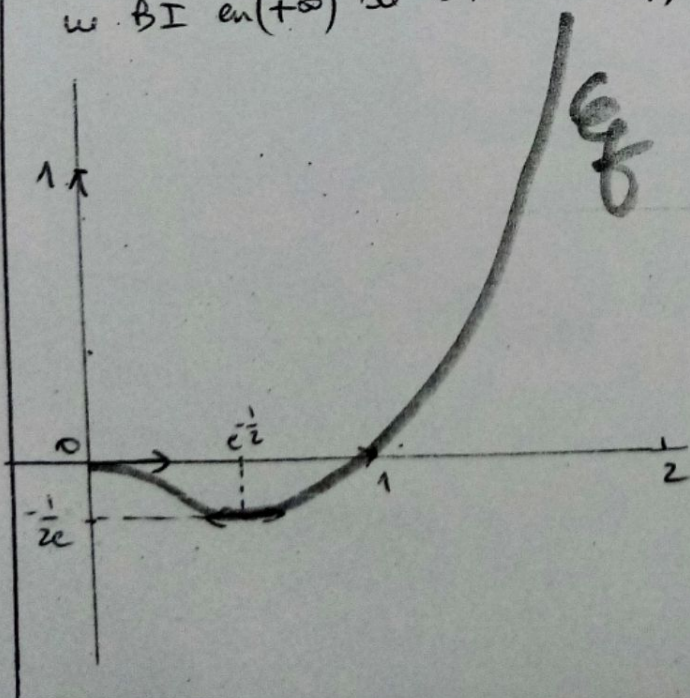
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	0			$\nearrow +\infty$

$f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$ (B.I.)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \Rightarrow$ f admet
 un B.I. en $(+\infty)$ de direction $(0, \frac{1}{2})$



⑪ $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2} < 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$			$\searrow 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \Rightarrow f$ intégrable
 par continuité en 0

on pose $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \\ g(0) = 0 \end{cases}$

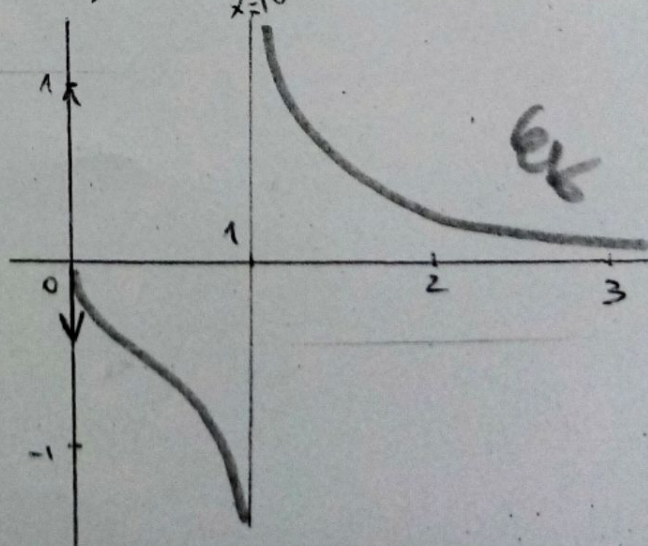
Étudions la $\mathcal{C}^1$ de g en 0:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$
 $\Rightarrow g$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0 et f admet
 en $(0, 0)$ une demi-tangente verticale
 dirigée vers le bas.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$ $\Rightarrow x=1$ Asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

$\Rightarrow y=0$ Asymptote horizontale en $(+\infty)$



⑫ $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^3}$ $D_f =]0, +\infty[$

$f \in \mathcal{C}^1$ on $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(x^3) - 3x^2(1 - \ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(-1 - 3 + 3\ln x)}{x^6}$$

$$f'(x) = \frac{3\ln x - 4}{x^4}$$

on résolvant $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\ln x - 4 = 0$

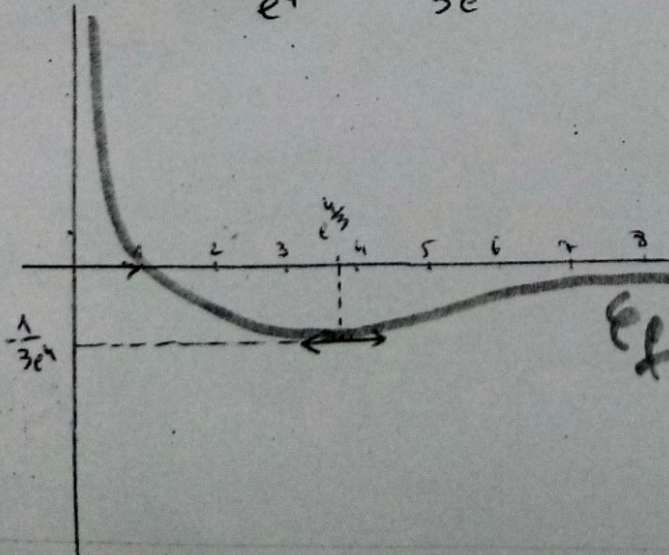
$\Rightarrow \ln x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8$

x	0	$e^{\frac{4}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$		0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x^3} = +\infty$
 $\Rightarrow x = 0$ Asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3} \right) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ Asymptote horizontale en $+\infty$

$f(e^{\frac{4}{3}}) = \frac{1 - \frac{4}{3}}{e^4} = \frac{-1}{3e^4} \approx -0,004$

**Exercice N° 09 :**

1) a) $g(x) = \frac{2e - x - x \ln x}{x}$ $D_g =]0, +\infty[$

$g \in \mathcal{C}^1$ on $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{-2e}{x} - \frac{1}{x} < 0$

x	0	e	$+\infty$
$g(x)$		+	-
$g'(x)$	$+\infty$		$-\infty$

$g(e) = \frac{2e - e - e}{e} = 0$

b) x | 0 | e | $+\infty$
 $g(x)$ | | + | 0 | -

2) $f(x) = (2e - x) \cdot \ln x$ $D_f =]0, +\infty[$

$f \in \mathcal{C}^1$ on $]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\ln x + \frac{2e - x}{x} = \frac{2e - x - x \ln x}{x}$$

$f''(x) = g(x) \Rightarrow \text{sgn}(f') = \text{sgn}(g)$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$		$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e - x) \ln x = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$: Asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e - x) \ln x = -\infty$

$f(e) = e$

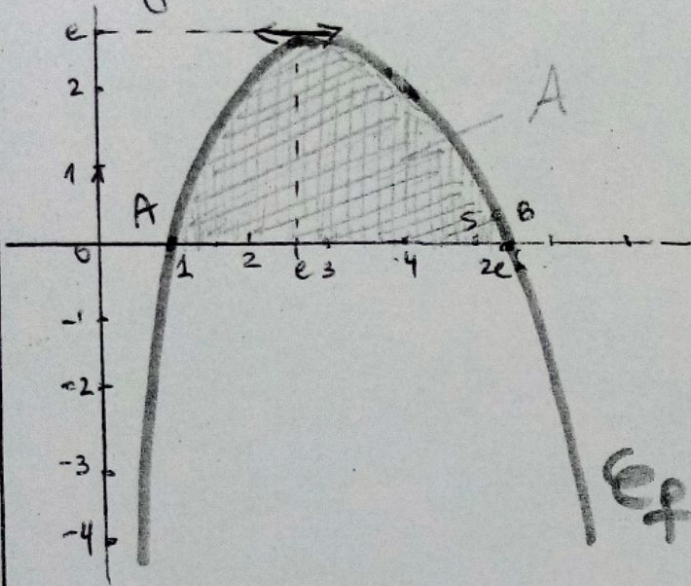
3) $\mathcal{C}_f \cap (x'x) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$2e - x = 0 \Rightarrow x = 2e$

ou $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f \cap (x'x) = \{A(1,0), B(2e,0)\}$

BI: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2e-x}{x} \right) \ln x = -\infty$
 $\Rightarrow$ Cef admet une BI en $(+\infty)$ d'im(0)⁺



$$A = \int_1^{2e} f(x) dx = \int_1^{2e} (2e-x) \ln x dx$$

on pose $u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$
 $v'(x) = 2e-x \rightarrow v(x) = 2ex - \frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow A = \left[\left(2ex - \frac{1}{2}x^2 \right) \ln x \right]_1^{2e} - \int_1^{2e} \left(2e - \frac{1}{2}x \right) dx$$

$$= \left[\left(2ex - \frac{1}{2}x^2 \right) \ln x - 2ex + \frac{1}{4}x^2 \right]_1^{2e}$$

$$= \left((4e^2 - 2e^2) \ln(2e) - 4e^2 + e \right) - \left(0 - 2e + \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2e^2 \ln(2e) - 3e^2 + 2e - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = 2e^2 (\ln 2 + 1) - 3e^2 + 2e - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = e^2 (\ln 2 - 1) + 2e - \frac{1}{4} \text{ ua}$$

Exercice N° 10:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

1) f existe si $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases}$

x	-∞	-1	1	+∞
1+x	-	0	+	+
1-x	+	+	0	-
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	-

$$D_f =]-1, 1[$$

$$\forall x \in]-1, 1[\Rightarrow (-x) \in]-1, 1[$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right) \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] = \frac{1}{2} \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

concl: f est une fonction impaire
d'où $D_e = [0, 1[$

2) $f \in \mathcal{C}^1$ sur D_f

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2} > 0$$

x	-1	0	1
f'(x)		+	
f(x)		0	

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = +\infty$
 $\Rightarrow x=1$ A.V

3) a) $T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

on $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

$$\Rightarrow T_0: y = x$$

on pose $\varphi(x) = f(x) - x$ $D_\varphi =]-1, 1[$

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0$$

x	-1	0	1
φ'		+	
φ		0	

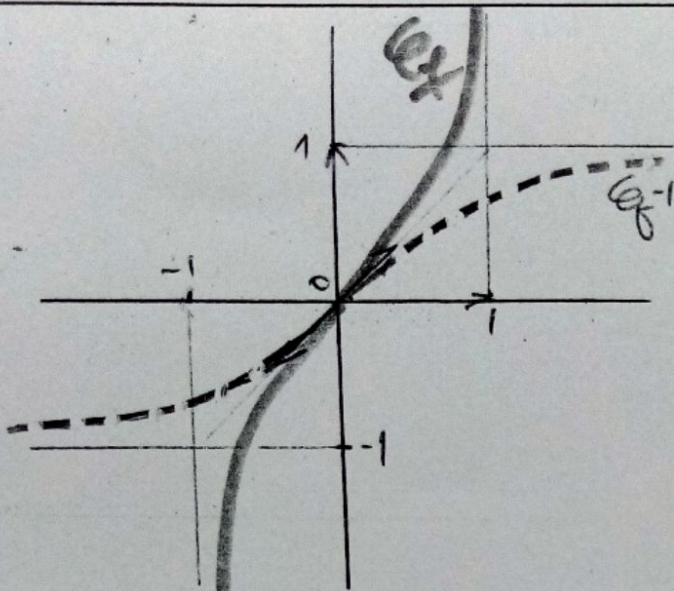
$\varphi(0) = 0$

d'où si $x \in]-1, 0]$, $\varphi(x) \leq 0$

et si $x \in [0, 1]$, $\varphi(x) \geq 0$

x	-1	0	1
$\varphi(x)$		-	+
Position de Cef			
T_0			

Cef au dessous de T_0 (à gauche)
Cef au dessus de T_0 (à droite)
Cef = T_0 (au point 0)



4) $f \in \mathcal{C}^1 \nearrow]-1, 1[\Rightarrow f$ réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} de finie par :

$$\begin{cases} \forall y \in]-1, 1[\\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$$

en effet : $f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = x$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = 2x \Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 1+y = e^{2x} - y e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow y(1+e^{2x}) = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

calcul : $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$C_{f^{-1}} = S_A(C_f) / \Delta: y = x$$

Exercice N° 11 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln x \quad D_f =]0, +\infty[$$

1) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{0^+} \frac{1+x \ln x}{x} = +\infty \Rightarrow x=0 : A.V$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x = +\infty \text{ (BT)}$

$$f(1) = 1$$

2) a) Point d'inflexion : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-2}{x^3}$$

x	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

f'' s'annule en 2 et change de signe

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$$

$\Rightarrow \Omega(2, \frac{1}{2} + \ln 2)$ est un point d'inflexion pour la courbe C_f

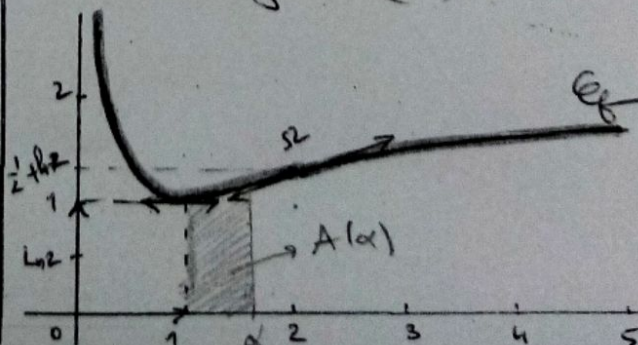
b) T_Ω : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} + \ln 2$$

$$\Leftrightarrow T_\Omega : \boxed{y = \frac{1}{4}x + \ln 2}$$

3) $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} = 0$

$\Rightarrow C_f$ admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$ de $d'ini(OC)$



$$4) a) \forall x > 0, \quad g(x) = f(x) - x$$

$$g \subseteq \subseteq \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1$$

$$= \frac{-x^2 + x - 1}{x^2} < 0 \quad \text{car } \Delta < 0$$

x	0	1	+\infty
g'(x)		-	
g(x)	+\infty	0	-\infty

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right)$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - x = +\infty$$

g continue et strict $\searrow$ sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow g$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

$$b) g \subseteq \subseteq \text{ sur }]0, +\infty[\Rightarrow g^{-1} \subseteq \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$g'(x) \neq 0$$

en particulier g^{-1} est dérivable en 0

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$\text{or } f(1) = 1 \Rightarrow f(1) - 1 = 0 \Rightarrow g(1) = 0$$

$$\text{d'où } g^{-1}(0) = 1$$

$$\Rightarrow (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$5) \alpha > 1 \quad A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \int_1^\alpha \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \left[\ln x + x \ln x - x \right]_1^\alpha$$

$$= (\ln \alpha + \alpha \ln \alpha - \alpha) - (0 + 0 - 1)$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = (1 + \alpha) \ln \alpha + 1 - \alpha \quad \text{u.a.}$$

$$A(\alpha) = 2 \Leftrightarrow (1 + \alpha) \ln \alpha + 1 - \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha) \ln \alpha - (\alpha + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha)(\ln \alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ absurde} \\ \text{or} \\ \ln \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e \end{cases}$$

$$\text{concl. : } A(e) = 2$$